1. Todo número aleatório gerado por um computador é verdadeiramente aleatório? Justifique sua resposta.

2. Qual a importância da semente (seed) na geração de números pseudoaleatórios?

3. Cite pelo menos três aplicações práticas da geração de números aleatórios na Estatística.

4. Construa o código em R de uma função para gerar números pseudoaleatórios no intervalo [0,1] utilizando o Gerador Congruente Linear com os seguintes parâmetros:

```r
a <- 1664525
c <- 1013904223
m <- 2^32
x0 <- 987654321
n <- 1000
```

   Salve os valores em um vetor chamado `samples.ramdon`.

5. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição logística com média μ e desvio padrão s, ou seja, $X \sim \text{Logística}(\mu, s)$, com função de densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{\exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}{s\left(1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)\right)^2}$$

   Onde: $x, \mu \in \mathbb{R}$ e $s > 0$. E função de distribuição acumulada (CDF):

$$F_X(x) = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{x-\mu}{s}\right)}$$

   (a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar uma variável aleatória X que siga uma distribuição logística $\text{Logística}(\mu, s)$.

   (b) **Parte 2:** Considere $\mu = 3$ e $s = 1$. Gere uma amostra de 1000 observações de X usando o método da inversa. Faça um histograma dos dados com a curva teórica.

6. Considere uma variável aleatória X com distribuição de Chen, com parâmetro $\theta > 0$, cuja função de distribuição acumulada (CDF) é dada por:

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\theta(e^x - 1)\right), \quad x \geq 0$$

e função densidade de probabilidade (PDF) associada:

$$f(x) = \theta e^x \exp\left(-\theta(e^x - 1)\right), \quad x \geq 0$$

(a) **Parte 1:** Escreva o algoritmo do método da inversa para gerar uma amostra aleatória da distribuição de Chen com parâmetro θ.

(b) **Parte 2:** Implemente o algoritmo para gerar uma amostra com $n = 10.000$ observações com $\theta = 2$ e construa o histograma com a densidade teórica sobreposta.

7. Uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Gumbel com parâmetros de localização α e de escala $\beta > 0$, ou seja, $X \sim \text{Gumbel}(\mu, \beta)$, tem função densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta} \exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right) \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

E função de distribuição acumulada (CDF):

$$F_X(x) = \exp\left(-\exp\left(-\frac{x-\alpha}{\beta}\right)\right)$$

(a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostra variável aleatória X que siga uma distribuição $\text{Gumbel}(\alpha, \beta)$.

(b) **Parte 2:** Considere $\alpha = 4$ e $\beta = 1.5$. Gere uma amostra de 1000 observações da variável aleatória X usando o método da inversa e faça um histograma dos dados com a curva teórica.

8. Uma variável aleatória X que segue uma distribuição de Lindley com parâmetro $\theta > 0$, ou seja, $X \sim \text{Lindley}(\theta)$, tem função densidade de probabilidade (PDF) dada por:

$$f_X(x) = \frac{\theta^2}{1+\theta}(1+x)\exp(-\theta x), \quad x > 0$$

E função de distribuição acumulada (CDF) dada por:

$$F_X(x) = 1 - \left(1 + \frac{\theta x}{1+\theta}\right)\exp(-\theta x)$$

(a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostras da variável aleatória $X \sim \text{Lindley}(\theta)$, com $\theta > 0$. Como a inversa fechada da CDF não é simples, utilize a função `uniroot` para resolver a inversa.

(b) **Parte 2:** Considere $\theta = 2$, gere uma amostra de 1000 observações da variável X e faça um histograma dos dados com a curva teórica baseada na distribuição Lindley.

9. Considere uma variável aleatória X que segue uma distribuição Gama com parâmetros $\alpha > 0$ (forma) e $\beta > 0$ (escala), ou seja, $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. A função densidade de probabilidade (PDF) dessa distribuição é:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

E sua função de distribuição acumulada (CDF) dada por:

$$F_X(x) = \int_0^x \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} t^{\alpha-1} e^{-t/\beta}\, dt$$

(a) **Parte 1:** Utilize o método da inversa para gerar amostras da variável aleatória $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$. Como a CDF não tem forma fechada, utilize as funções `integrate` e `uniroot` para resolver essa questão (Dica $\Gamma()$ é calculado no `R` pela função `gamma()`).

(b) **Parte 2:** Considere $\alpha = 2$ e $\beta = 2$, gere uma amostra de 1000 observações da variável X e faça um histograma dos dados com a curva teórica

10. Considere uma variável aleatória discreta X com a seguinte distribuição de probabilidade:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

(a) Utilize o método da inversa para simular n valores dessa variável aleatória.

(b) Gere uma amostra com 500 observações dessa variável X e faça um gráfico adequado para verificar o percentual de cada valor gerado.

11. Seja uma variável aleatória discreta X com a seguinte distribuição de probabilidade:

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	0,1	0,25	0,35	0,2	0,1

(a) Utilize o método da inversa para simular n valores dessa variável aleatória.

(b) Gere uma amostra com 500 observações dessa variável X e faça um gráfico adequado para verificar o percentual de cada valor gerado.

12. Considere uma parametrização da Distribuição Geométrica onde uma variável aleatória $X \sim \text{Geom}(p)$, com $0 < p < 1$ tem função de distribuição de probabilidade dada por:

$$P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

E a função de distribuição acumulada (CDF) dessa distribuição geométrica é:

$$F_X(k) = P(X \le k) = 1 - (1-p)^k$$

(a) Usando o método da inversa, crie uma função para gerar uma variável aleatória X com distribuição geométrica Geom(p).

(b) Gere uma amostra de 1000 observações de X com $p = 0{,}4$ e faça um gráfico adequado para verificar os valores simulados com a distribuição teórica.

13. Considere a variável aleatória X com distribuição de Gompertz discreta, com função de probabilidade dada por:

$$P(X = k) = e^{-bc^k} - e^{-bc^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

com $b > 0$ e $c > 1$. E a função de distribuição acumulada (CDF) dessa distribuição é dada por:

$$F(k) = 1 - e^{-bc^{k+1}}$$

(a) A partir da CDF, crie um código para gerar X com distribuição de Gompertz discreta usando o método da inversa.

(b) Usando $b = 2$ e $c = 1{,}5$, gere 1000 observações da distribuição de Gompertz discreta e faça um gráfico adequado para verificar os valores simulados com a distribuição teórica.

14. Deseja-se gerar amostras aleatórias de uma variável aleatória X com distribuição Binomial $B(n, p)$, cuja função de probabilidade é:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

Tome como função auxiliar $g(x)$ a distribuição uniforme discreta no intervalo $[a, b]$, isto é:

$$g(x) = \frac{1}{n}, \quad n = b - a + 1.$$

E a constante k tal que:

$$k = \max\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

(a) Criei um algoritmo para gerar amostras de X usando o método da rejeição com a distribuição auxiliar $g(x)$ e a constante k.

(b) Tome $n = 10$ e $p = 0{,}35$, implemente o procedimento e gere 1000 observações da distribuição. Faça uma verificação gráfico adequado para os valores simulados sobre a distribuição teórica.

15. Deseja-se gerar amostras aleatórias de uma variável aleatória com distribuição t de Student com ν graus de liberdade, cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\ \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para isso, utilize o **método da rejeição**, considerando como função auxiliar $g(x)$ a distribuição Cauchy padrão, cuja função densidade de probabilidade é:

$$g(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

E para a constante k use:

$$k = \max\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$$

(a) Implemente em R o algoritmo do método da rejeição para gerar $N = 10\,000$ amostras da distribuição $t(3)$ utilizando a função auxiliar $g(x)$ e a constante k determinada.

(b) Construa o histograma das amostras obtidas e compare com o gráfico da densidade teórica da distribuição $t(3)$.